數學傳播　46卷1期, pp. 33-39

一元三次方程式的再探

廖信傑・薛昭雄

1. 前言

給定一個一元三次實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$, 我們可以做一個平移將 x 替換爲 $x-\frac{a}{3}$ 使原方程的二次項消失, 得到$x^3+px+q=0$其中$p=-\frac{a^2}{3}+b$, $q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$, 因此若想要解一般的一元三次方程式, 只需要知道如何解形如 $x^3+px+q=0$之三次方程即可。

而實際上化簡後的三次方程其三根分別爲

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ \omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ \omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B},$$

其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $A=\frac{-q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, $B=\frac{-q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, 這就是出名的 Cardano 公式 [6]。此公式是由義大利數學家G. Cardano(1501-76) 提出, 也曾出現在他的著作 Ars Magna 中, 有關這個公式的歷史可參閱 [3], 推導過程可參閱 [1], [5]。

2. 一個特別的恆等式

陳永川教授 [4] 由於 Sylvester [9] 工作的啟發, 於 2020 年提出若令 $p=-3rs$, $q=rs(r+s)$, 則多項式 $x^3+px+q=0$ 可用下列恆等式來求解

$$x^3-3rsx+rs(r+s)=\frac{s}{s-r}(x-r)^3+\frac{r}{r-s}(x-s)^3. \tag{1}$$

他的結果如下:

(i) 若 $r=s$, 則 x^3+px+q 可分解如下

$$x^3-3r^2x+2r^3=(x-r)^2(x+2r)。$$

(ii) 若 $r\neq s$ ($s\neq 0$, 因爲 $p\neq 0$), 則$x^3+px+q=0$之三根x_1,x_2,x_3 爲 $x_i=\frac{r-su_i}{1-u_i}$, $i=1,2,3$, 其中 u_1,u_2,u_3 爲 $\frac{r}{s}$ 之立方根。

本文的目的是延續陳教授的工作將解 $x^3+px+q=0$ 做進一步的詳細分析及說明。

雖然 $r=s$ 之情況已經出現於 [4] 中, 爲了保持討論的完整性, 我們仍由此情況開始, 此時方程式 $x^3-3rsx+rs(r+s)=0$ 可以因式分解如下:

$$\begin{aligned} x^3-3r^2x+2r^3 &= (x^3-r^3)-3r^2(x-r)\\ &= (x-r)(x^2+rx-2r^2)\\ &= (x-r)^2(x+2r). \end{aligned}$$

所以此時的解爲 $r, r, -2r$ 也可以寫成 $\sqrt{rs}, \sqrt{rs}, -2\sqrt{rs}$。於是我們有以下定理:

定理 2.1. 令 $x^3-3rsx+rs(r+s)=0$ 爲一實係數方程式, 若 $r=s$ 則其三根爲

$$\sqrt{rs}, \sqrt{rs}, -2\sqrt{rs}.$$

例 2.1. 解 $x^3-12x+16=0$.

解. 這裡 $rs=4$, $rs(r+s)=16$ 即 $r+s=4$, 因此 r, s 爲 $t^2-4t+4=0$ 之二根, 故 $r=s=2$, 從而由定理 2.1 原多項式之三根爲 $2, 2, -4$。

接下來當 $r\neq s$ 時, 首先由陳教授的恆等式 (1) 可得

$$\frac{s}{s-r}(x-r)^3+\frac{r}{r-s}(x-s)^3=x^3-3rsx+rs(r+s)=0,$$

將上式整理一下可得

$$s(x-r)^3=r(x-s)^3 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{x-r}{x-s}\right)^3=\frac{r}{s}。 \tag{2}$$

因爲 rs 及 $rs(r+s)$ 皆爲實數, 我們只需考慮兩種情況, 即 r 與 s 皆爲實數或 r 與 s 爲一對共軛複數。

現在若 r, s 皆爲實數, 此時 $\frac{r}{s}$ 爲實數, 所以 $\frac{x-r}{x-s}=\sqrt[3]{\frac{r}{s}}, \sqrt[3]{\frac{r}{s}}\omega, \sqrt[3]{\frac{r}{s}}\omega^2$, 其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。當 $\frac{x-r}{x-s}=\sqrt[3]{\frac{r}{s}}$, 有 $\sqrt[3]{s}(x-r)=\sqrt[3]{r}(x-s) \Rightarrow (\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{r})x=\sqrt[3]{s}r-\sqrt[3]{r}s$, 從而

$$x=\frac{\sqrt[3]{s}r-\sqrt[3]{r}s}{\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{r}}=\frac{r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{2}{3}}-s^{\frac{2}{3}})}{s^{\frac{1}{3}}-r^{\frac{1}{3}}}=-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{1}{3}}+s^{\frac{1}{3}})。$$

同理, 當 $\frac{x-r}{x-s}=\sqrt[3]{\frac{r}{s}}\omega$ 時, 化簡可得 $\sqrt[3]{s}(x-r)=\sqrt[3]{r}\omega(x-s) \Rightarrow (\sqrt[3]{s}-\omega\sqrt[3]{r})x=$

$\sqrt[3]{s}r-\omega\sqrt[3]{r}s$, 從而

$$x=\frac{\sqrt[3]{s}r-\omega\sqrt[3]{r}s}{\sqrt[3]{s}-\omega\sqrt[3]{r}}=\frac{r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{2}{3}}-\omega s^{\frac{2}{3}})}{s^{\frac{1}{3}}-\omega r^{\frac{1}{3}}}=\frac{r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{2}{3}}-\omega s^{\frac{2}{3}})\omega^2}{\left(s^{\frac{1}{3}}-\omega r^{\frac{1}{3}}\right)\omega^2}$$
$$=-\frac{r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega^2r^{\frac{2}{3}}-s^{\frac{2}{3}})}{\omega^2\left(\omega r^{\frac{1}{3}}-s^{\frac{1}{3}}\right)}=-\omega r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega r^{\frac{1}{3}}+s^{\frac{1}{3}})$$
$$=-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega^2r^{\frac{1}{3}}+\omega s^{\frac{1}{3}})。$$

最後當 $\frac{x-r}{x-s}=\sqrt[3]{\frac{r}{s}}\omega^2$ 時, 類似的做法可以得到 $x=-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega r^{\frac{1}{3}}+\omega^2s^{\frac{1}{3}})$。總結以上結果, 我們可以得到下列定理:

定理 2.2. 令 $x^3-3rsx+rs(r+s)=0$ 爲一實係數方程式, 其中 $r\neq s$。若 r,s 均爲實數, 則此方程式的三根爲

$$-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{1}{3}}+s^{\frac{1}{3}}),\ \ -r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega^2r^{\frac{1}{3}}+\omega s^{\frac{1}{3}}),\ \ -r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega r^{\frac{1}{3}}+\omega^2s^{\frac{1}{3}}).$$

即此時其有一實根及一對共軛複數根。

例 2.2. 現在我們想要求方程式 $x^3-6x-9=0$ 的三個根。

解. 已知r,s爲$t^2+\frac{9}{2}t+2=0$之兩根, 則$r=-\frac{1}{2}$, $s=-4$爲兩相異實數, 由定理2.2知此方程式之三根爲

$$-2^{\frac{1}{3}}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+(-4)^{\frac{1}{3}}\right)=-((-1)^{\frac{1}{3}}+(-8)^{\frac{1}{3}})=3,$$
$$-2^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)(-4)^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$=-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{2-2\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{-3+\sqrt{3}i}{2},$$
$$-2^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)(-4)^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$=-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{2+2\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}.$$

註 1. 如果我們用 Cardano 公式來求 $x^3-6x-9=0$ 之解, 可得其實根爲

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{49}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{49}}{2}}.$$

而用本文介紹的方法可以得到此實根爲 $x=3$, 因此若使用 Cardano 公式仍需化簡使

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{49}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{49}}{2}}=3,$$

而我們的方法能避免這項化簡工作。

接下來考慮第二種情況, 當 r、s 爲一對共軛複數時, 接下來的討論將涉及對一般複數開三次方根, 爲了避免產生混淆, 我們先固定一些符號的使用。

任意複數 $z=x+iy\neq 0$ 可以表爲 $z=|z|e^{i\theta}=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, z 的輻角 $\mathrm{Arg}(z)=\theta\in(-\pi,\pi]$; 將 z 的共軛複數 $x-iy$ 記爲 $\overline{z}$, z 的實部 x 記爲 $\mathrm{Re}(z)$。對任意正整數 m, z 有 m 個 m 次方根分別爲 $\alpha,\alpha\zeta,\alpha\zeta^2,\ldots,\alpha\zeta^{m-1}$, 其中 $\alpha=\sqrt[m]{|z|}e^{i\frac{\theta}{m}}$, $\zeta=e^{i\frac{2\pi}{m}}$, 在這篇文章裡我們將 α 記做 $z^{\frac{1}{m}}$, 特別當 $\theta=0$ 時 $z^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{z}$。

現在由 (2) 式可得 $\frac{x-r}{x-s}=\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\omega$, $\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\omega^2$, 跟前面情況同樣的計算可以得到當 r,s 爲一對共軛複數時此方程的解跟 r,s 爲實數時有同樣的表示法:

$$-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{1}{3}}+s^{\frac{1}{3}}),\ \ -r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega r^{\frac{1}{3}}+\omega^2 s^{\frac{1}{3}}),\ \ -r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega^2 r^{\frac{1}{3}}+\omega s^{\frac{1}{3}}). \tag{3}$$

不過當 r,s 爲一對共軛複數時, 這個表法可以再化簡如下:
令 $r=|r|e^{i\theta}$, 則 $s=|s|e^{-i\theta}$, 因爲 $|r|=|s|$ 所以 $r^{\frac{1}{3}}=|r|^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}=(rs)^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\theta}{3}}$, $s^{\frac{1}{3}}=(rs)^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\theta}{3}}=\overline{r^{\frac{1}{3}}}$, 於是

$$\begin{aligned}
-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{1}{3}}+s^{\frac{1}{3}}) &= -(rs)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\left(e^{i\frac{\theta}{3}}+e^{-i\frac{\theta}{3}}\right)=-2\sqrt{rs}\cos\frac{\theta}{3},\\
-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega r^{\frac{1}{3}}+\omega^2 s^{\frac{1}{3}}) &= -(rs)^{\frac{1}{3}}(\omega r^{\frac{1}{3}}+\overline{\omega r^{\frac{1}{3}}})=-2(rs)^{\frac{1}{3}}\mathrm{Re}(\omega r^{\frac{1}{3}})\\
&= -2\sqrt{rs}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\\
-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega^2 r^{\frac{1}{3}}+\omega s^{\frac{1}{3}}) &= -(rs)^{\frac{1}{3}}(\omega^2 r^{\frac{1}{3}}+\overline{\omega^2 r^{\frac{1}{3}}})=-2(rs)^{\frac{1}{3}}\mathrm{Re}(\omega^2 r^{\frac{1}{3}})\\
&= -2\sqrt{rs}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

所以我們得到以下定理:

定理 2.3. 令 $x^3-3rsx+rs(r+s)=0$ 爲一實係數方程式, 其中 $r\neq s$。若 r,s 爲一對共軛複數, $\theta=\mathrm{Arg}(r)$, 則此方程式的三根爲

$$-2\sqrt{rs}\cos\frac{\theta}{3},\ \ -2\sqrt{rs}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\ \ -2\sqrt{rs}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

等三個實根。

註 2. 注意到, 由定理 2.3 的結果, 從根與係數關係可得到下列三角函數恆等式

$$\cos\frac{\theta}{3}+\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

$$\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3}{4}$$

$$\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\cos\theta}{4}.$$

最後一個恆等式可由三根之積爲 $rs(r+s)$ 且 $r=|r|e^{i\theta}, s=|r|e^{-i\theta}$ 推得。

註 3. 由註 2, 我們知道$\cos\frac{\theta}{3}+\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=0$, 因此有另一個漂亮的恆等式

$$\cos^3\frac{\theta}{3}+\cos^3\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^3\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=3\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

例 2.3. 解 $x^3-48x-64\sqrt{2}=0$.

解. 這裡 $rs=16$, $r+s=-4\sqrt{2}$, 所以 r,s 爲 $t^2+4\sqrt{2}t+16=0$ 之兩根, 則 $r=\frac{-4\sqrt{2}+\sqrt{32-64}}{2}=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i=4e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $s=4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. 所以 $\theta=\frac{3\pi}{4}$, 於是由定理 2.3, 可知方程式之三根爲

$$\begin{aligned}
-2\cdot 4\cos\frac{\pi}{4}&=-8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-4\sqrt{2},\\
-2\cdot 4\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)&=8\cos\frac{\pi}{12}=8\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+2\sqrt{6},\\
-2\cdot 4\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)&=-8\cos\frac{19\pi}{12}=-8\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

例 2.4. 解 $x^3-\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{8}=0$.

解. 有 $rs=\frac{1}{4}$, $r+s=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 r,s 爲 $t^2-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{4}=0$ 之兩根, 則 $r=\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $s=\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ 爲一對共軛複根, 其中 $\theta=\frac{\pi}{6}$。所以由定理 2.3 可知此方程式之三根爲

$$\begin{aligned}
-2\sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\right)&=-\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)=\sin\left(\frac{14\pi}{9}\right),\\
-\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right)&=-\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right),\\
-\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}\right)&=-\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right).
\end{aligned}$$

例 2.5. 解 $x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$.

解. 有 $rs=\frac{1}{4}$, $r+s=\frac{1}{2}$, 所以 r,s 爲 $t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}=0$ 之兩根, 則 $r=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, $s=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ 爲一對共軛複根, 其中 $\theta=\frac{\pi}{3}$。所以由定理 2.3 可知此方程式之三根爲

$$\begin{aligned}
-2\sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3}\right)&=-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right),\\
-\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)&=-\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right),\\
-\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)&=-\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right).
\end{aligned}$$

註 4. 這個例子也由 V. S. Shevelev [8] 用另一個方法計算出同樣的答案, 同時他也證明了以下恆等式

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}},$$

此爲著名之 Ramanujan cubic polynomials 的一個例子, 出現在 Ramanujan 的第二本筆記 [7] 中, 相關細節可參閱 [2].

3. 結論

綜觀上述討論的結果, 注意到雖然我們將實係數方程 $x^3-3rsx+rs(r+s)=0$ 的解分成 $r=s$ 或 r、s 爲相異實數或 r、s 爲一對共軛複數這三種情況討論, 但實際上這三種情況得到的解都可以用 (3) 式統一表示, 所以我們可以將至今所有結果統整如下:

定理 2.4. 給定一個實係數三次方程式 $x^3+px+q=0$ $(p,q\neq 0)$, 將其表成 $x^3-3rsx+rs(r+s)=0$, 則此方程式的三根爲

$$-r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{1}{3}}+s^{\frac{1}{3}}),\ \ -r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega r^{\frac{1}{3}}+\omega^2 s^{\frac{1}{3}}),\ \ -r^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}(\omega^2 r^{\frac{1}{3}}+\omega s^{\frac{1}{3}}).$$

特別地當 $r=s$ 時可進一步化簡成

$$-2\sqrt{rs},\sqrt{rs},\sqrt{rs};$$

當 $r\neq s$ 且 r 與 s 爲一對共軛複數時, 令 $\theta=\mathrm{Arg}(r)$, 則三根可進一步化簡成

$$-2\sqrt{rs}\cos\frac{\theta}{3},\ \ -2\sqrt{rs}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\ \ -2\sqrt{rs}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

此外, 若比較 Cardano 公式及本文所介紹之方法可發現, 當 r, s 爲實數時, 由 Cardano 公式所得之實根形如

$$x=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}},$$

而由本文的方法可得實根爲

$$x=-(rs)^{\frac{1}{3}}(r^{\frac{1}{3}}+s^{\frac{1}{3}}).$$

所以從計算方面來看本文的結果要比 Cardano 公式的結果簡單得多, 見例2.2之後的註解。

致謝

作者要感謝陳永川教授在本文撰寫的過程中提供了寶貴的意見及鼓勵, 也謝謝他提供 [4] 的最新原稿。感謝審稿人仔細地閱讀原稿使本文更完善。

參考文獻

1. 周伯欣。我的三次方程式公式解之旅。數學傳播季刊, 44(2), 72-77, 2020。
2. B. Berndt, S. Bhargava, Ramanujan-for lowbrows, *American Mathematical Monthly*, 100, 644-656, 1993.
3. D. M. Burton, *Abstract Algebra*, Wm. C. Brown Company Publishers, Dubuque, IA, 1988.
4. W. Y. C. Chen, *Cubic Equations Through the Looking Glass of Sylvester*, College Math. J., to appear, Arxiv preprint: 2103.15051, 2021.
5. L. Gilbert and J. Gilbert, *Elementary Modern Algebra*, 8th Ed, Cengage Learning, 2015.
6. J. W. Harris and H. Stocker, *Handbook of Mathematics and Computational Science*, Springer-Verlaine New York, Inc., 1998.
7. S. Ramanujan, Notebooks (2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 1957.
8. V. S. Shevelev, “*Three Formulas of Ramanujan*”, In: Tabachnikov, S. ed. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, I, Vol. 14 of *Math. World.* Providence, RI: (American Mathematical Society), 139-144.
9. J.J. Sylvester, On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants, *Math. Mag.*, 2 (1851), 391-410.

—本文作者廖信傑爲美國 University of Miami 博士生, 薛昭雄任教於美國 University of Nevada, Las Vegas—